

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$1.a) XA + B = C \Leftrightarrow XA = C - B \Leftrightarrow X = (C - B)A^{-1}.$$

$$1.b) C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Posto que } \det A = 8 - 3 = 5, \text{ tense}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (C - B)A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvese a idea seguinte: calcular $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ e μ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

2.a) Nótese que $\text{Dom } f = (0, \infty)$. Cómpre estudar o signo de

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1),$$

que coincide co signo de $2 \ln x + 1$ en $\text{Dom } f$. Agora ben, $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > -1 \Leftrightarrow$

$\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$, xa que a función exponencial crece estritamente.

Chegados a este punto, é obvio que $2 \ln x + 1 < 0$ se, e soamente se, $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.



MATEMÁTICAS II

Polo tanto, f decrece estritamente no intervalo $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ e crece estritamente no intervalo $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$. Posto que se trata dunha función continua, presenta un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Non hai outros extremos.

2.b) $y(x) = 4 - x^2 \Rightarrow y'(x) = -2x \Rightarrow y'(1) = -2$. Logo a ecuación da recta tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$ é

$$y(x) = -2(x - 1) + 3 = -2x + 2 + 3 = -2x + 5.$$

O vértice pedido, ao que chamaremos Q , é o punto de corte desa recta co eixe X :

$$[-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5] \Rightarrow Q(2.5, 0).$$

Á dereita móstrase o debuxo do triángulo, onde tamén están marcadas as rexións cuxas áreas hai que calcular: R_1 e R_2 . É claro que a parábola corta ao eixe X positivo en $x = 2$ (xa que aí $4 - x^2 = 0$).

Posto que $R_1 = T \cup R^*$, con

- T un triángulo de base 1 e altura 3 e
- R^* a rexión baixo a gráfica de $y = 4 - x^2$ (e sobre o eixe X) desde $x = 1$ hasta $x = 2$,

a área de R_1 pódese calcular do seguinte xeito (u indicará "unidade de lonxitude"):

T e R^* non se solapan

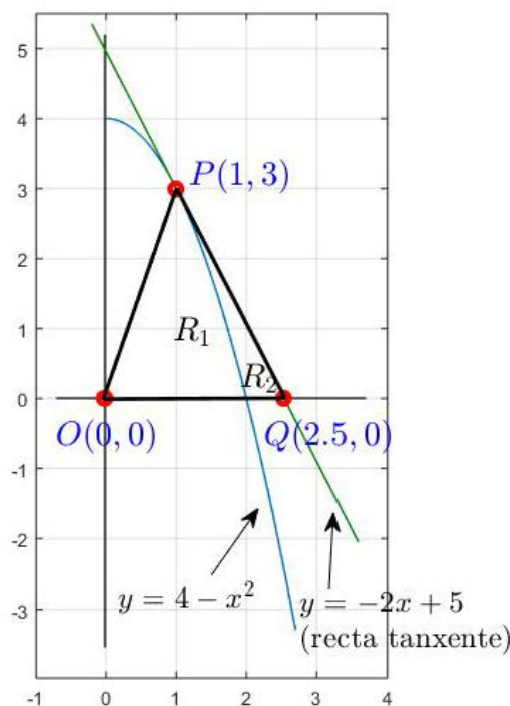
$$\begin{aligned} \text{área}(R_1) &= \text{área}(T) + \text{área}(R^*) = \frac{1 \cdot 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \\ &+ \left\{ 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right\} = \frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{3} = \frac{9 + 24 - 14}{6} = \frac{19}{6} u^2 = 3.1\bar{6} u^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{área}(R_2) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{45 - 38}{12} = \frac{7}{12} u^2 = 0.58\bar{3} u^2.$$

3. Pídese:

- Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m .
- Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(8, 1, m)$ estean aliñados.
- Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1, 2, 1)$ e $Q(8, 1, 1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1, 1, 1)$.



MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Como $\vec{n}_{\pi_1}(1, m, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(m, 1, 1)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2 ,

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = 1,$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ademais, podemos engadir que non son coincidentes cando $m = 1$, xa que nese caso $P(0,0,-2) \in \pi_1 \setminus \pi_2$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & 2 \\ m & 1 & 1 & | & m \end{pmatrix}$. Posto que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$ non se anulan á vez, $\text{rank } A^* = 2$ para calquera valor de m . Por outra banda, $\text{rank } A = 1$ cando $m = 1$ (as dúas filas de A son iguais e non nulas) e $\text{rank } A = 2$ cando $m \neq 1$, xa que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \neq 0$. Segundo esta análise:

- Se $m = 1$, $\text{rank } A = 1 < \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) A, B e C son, para tódolos valores dos parámetros k e m , puntos distintos, que estarán polo tanto aliñados se, e soamente se, os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} son paralelos. Posto que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1-k \\ m-1 \end{pmatrix}$, tense que

$$A, B \text{ e } C \text{ están aliñados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{8} = \frac{2-k}{1-k} \text{ e } m-1 = 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow [-1 + k = 16 - 8k \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow [9k = 17 \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow \left[k = \frac{17}{9} \text{ e } m = 1 \right].$$

3.c) $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é vector director da recta r , a cal ademais pasa polo punto

$P(-1,2,1)$, polo que as ecuacións paramétricas pedidas son

$$r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Chamemos π o plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$. Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(9, -1, 0)$ é un vector normal a π , tense $\pi: 9(x - 1) - (y - 1) = 0$. Tendo en conta que $9(x - 1) - (y - 1) = 9x - 9 - y + 1 = 9x - y - 8$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: 9x - y - 8 = 0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

MATEMÁTICAS II

- b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

Solución:

4.a) Damos nomes aos sucesos: R = “o mozo rega” e S = “a roseira sobrevive”.

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{P(S \cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap R) = \frac{2}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S \cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

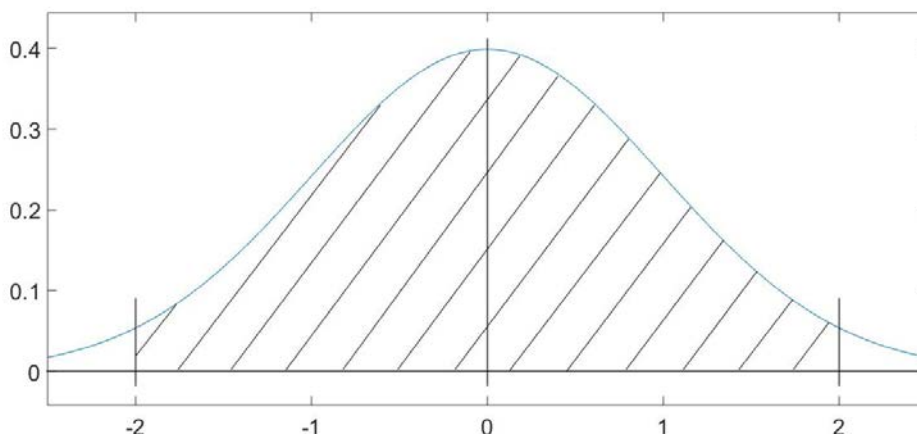
4.b) X = “grosor das pezas”.

$$X \rightarrow N(8, 0.01) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.01} \rightarrow N(0, 1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(7.98 \leq X \leq 8.02) &= P\left(\frac{7.98 - 8}{0.01} \leq Z \leq \frac{8.02 - 8}{0.01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z < -2) = P(Z \leq 2) - P(Z > 2) \\ &= P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 2)\} = 2P(Z \leq 2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \leq Z \leq 2)$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$

b) Resólvoo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & m & m & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+2 & 2 \end{array} \right)$$

polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ (m+2)z = 2. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z , seguindo co de y e terminando co de x . Sempre que $m \neq -2$, téñense que $z = \frac{2}{m+2}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 2z - 2 = \frac{4}{m+2} - 2 = \frac{-2m}{m+2}$, de onde se infire á súa vez que $y = \frac{-2}{m+2}$ cando, ademais de ser $m \neq -2$, é $m \neq 0$.

Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{2}{m+2}$, $y = \frac{-2}{m+2}$, $x = y - 3z + m = \frac{-2}{m+2} - \frac{6}{m+2} + m = \frac{-2-6+m(m+2)}{m+2} = \frac{m^2+2m-8}{m+2} = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2}$.
- Caso $m = -2$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 2$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ -2z = -2, \\ 2z = 2, \end{cases}$$

de onde $z = 1$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = y - 3z = \lambda - 3$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{pmatrix}$,

respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, é seguro que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$.

MATEMÁTICAS II

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 = m^2 + 2m = m(m+2),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{-2, 0\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas.
- Caso $m = -2$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 - 6 = -4 \neq 0$, tense $\text{rank } A = 2 < \text{rank } A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, tense $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 < n.$ de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \lambda - 3, \\ y = \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$ (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 2$, a solución é $z = \frac{2}{m+2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{m+2} = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2} = 0$. (Ver apartado 1.a).)

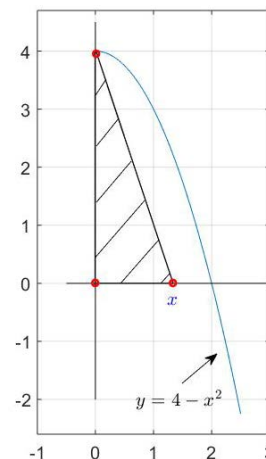
Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 2$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

- De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y , obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.
- Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

Solución:

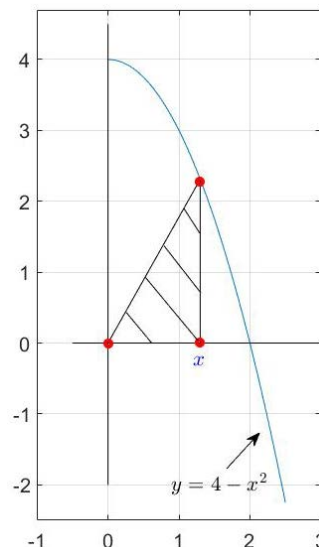
2.a) Se se entende que paralelo pode ser coincidente, non se pode descartar o caso no que o punto $P(0,4)$ é un vértice, co cal un dos catetos do triángulo está sobre o eixe Y . Teríamos unha situación como a que se representa no debuxo da dereita. Neste marco non hai triángulo de área máxima. En efecto, a área vén dada pola función $A(x) = \frac{4x}{2} = 2x$, con $x \in (0, \infty)$, que non ten máximo.



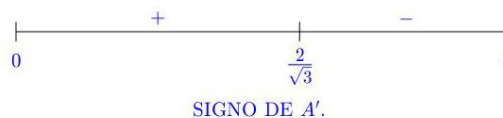
MATEMÁTICAS II

Supoñamos agora que ningún cateto pode estar sobre o eixe Y . Entón a situación anterior queda excluída e a única posibilidade é a representada no novo debuxo, á dereita, onde o triángulo ten base x e altura $4 - x^2$. Hai que buscar o máximo da función $A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$, con $x \in (0,2)$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\{4 - x^2 + x(-2x)\} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 4) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(x + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$



onde $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \in (0,2)$. Logo A é crecente (A' ten signo positivo) no intervalo $(0, \frac{2}{\sqrt{3}})$ e é decrecente (A' ten signo negativo) no intervalo $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$. Posto que A é continua, conclúese que ten un único máximo absoluto en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



Danse a continuación as medidas dos catetos e da hipotenusa do triángulo de área máxima (u indicará "unidade de lonxitude").

Catetos: $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ u} \approx 1.1547 \text{ u}$ e

$$y = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3} \text{ u} = 2.\bar{6} \text{ u}.$$

Hipotenusa: En virtude do teorema de Pitágoras, $h^2 = \frac{4}{3} + \frac{64}{9} = \frac{12+64}{9} = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$, polo que a medida da hipotenusa é

$$h = \sqrt{\frac{26}{3}} \text{ u} \approx 2.9439 \text{ u}.$$

2.b)

- **Teorema de Bolzano:** Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- **Teorema de Rolle:** Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

3. Pídese:

- Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r .
- Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ que forman.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Punto de corte:

É útil escribir as ecuacións paramétricas de r , que son r :
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 - 2\lambda, \\ z = 3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e substituír os valores de x, y e z na ecuación do plano para obter o valor do parámetro λ no punto de corte:

$3(2 + \lambda) + 2(-1 - 2\lambda) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 6 + 3\lambda - 2 - 4\lambda - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$,
de onde $x = 2 + \lambda = 3$, $y = -1 - 2\lambda = -3$ e $z = 3\lambda = 3$. É dicir, o punto de corte pedido é $P(3, -3, 3)$.

Ecuación implícita de π^* :

$\vec{u} = \vec{n}_\pi(3, 2, -1)$ e $\vec{v}(1, -2, 3)$ son xeradores de π^* , e $P(2, -1, 0) \in r \subset \pi^*$, polo que

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) - (y+1) - 6z - 2z - 2(x-2) - 9(y+1) = 4(x-2) -$$

$$10(y+1) - 8z = 4x - 8 - 10y - 10 - 8z = 4x - 10y - 8z - 18,$$

a ecuación implícita pedida é $\pi^*: 4x - 10y - 8z - 18 = 0$ ou, equivalentemente,

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z - 9 = 0.$$

3.b) $\vec{n}_{\pi_1}(2, -5, -4)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(1, 0, 0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e π_2 , logo é claro que os dous planos se cortan nunha recta, porque \vec{n}_{π_1} e \vec{n}_{π_2} non son paralelos.

O ángulo α que forman π_1 e π_2 coincide co ángulo que forman os vectores \vec{n}_{π_1} e \vec{n}_{π_2} , así

que $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\|}$. Téñense

- $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 2$,
- $\|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e
- $\|\vec{n}_{\pi_2}\| = 1$,

de onde, en primeira instancia, $\cos \alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \approx 0.2981424$ e, en segunda,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \approx 72.6539^\circ.$$

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona se A e B son ou non sucesos independentes.

MATEMÁTICAS II

- b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

Solución:

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$.
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$.

Por último, os sucesos A e B non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

- 4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \rightarrow B(5, 0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$.
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$.
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$.

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \rightarrow B(2100, 0.7)$. Os valores de n , p e q neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoalo do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable X pode ser aproximada por unha normal \tilde{X} de media np e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

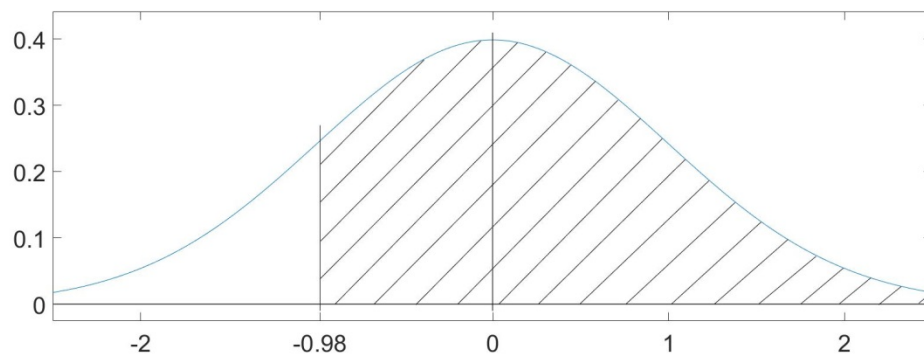
$$\tilde{X} \rightarrow N(1470, 21) \Rightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \rightarrow N(0, 1),$$

de onde

corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$\begin{aligned} P(X \geq 1450) &\approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98) \\ &= P(Z < 0.98) \approx 0.8365. \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(Z > -0.98)$.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPUESTAS / SOLUCIONES